Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$

Xavier Servot *

Février 2019

On prouve d'abord le théorème de Bolzano-Weirstrass dans $\mathbb{R}$. On introduit d'abord la notion de $\limsup$ d'une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On rappelle des propriétés liées au suprémum. Déjà, on va considérer que $\mathbb{R}$ est complet au sens qu'il existe un suprémum à tout ensemble non vide majoré.

Un propriété essentielle de notre preuve (et équivalente à l'axiome de complétude tel qu'énoncé) est que $\forall \varepsilon > 0, \exists e \in E$ tel que $e > s - \varepsilon$. Elle est prouvée par l'absurde: soit ε_0 tel que $\forall e \in E, e \leqslant s - \varepsilon_0$. Alors $s - \varepsilon_0$ est une borne supérieure de E par définition et est plus petite que le suprémum de E, ce qui est absurde.

Proposition 1. Tout suite décroissante et bornée inférieurement converge

Preuve. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée inférieurement et décroissante. Soit $i = \inf\{x_n \,|n \in \mathbb{N}\}$. Le fait que x_n converge découle directement de la propriété ennoncée ci-dessus:

On a que $\forall \varepsilon \leqslant 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{k_0} < i + \varepsilon$. (x_n) est décroissante donc $\forall k \geqslant k_0$, $x_k \leqslant x_{k_0} < i + \varepsilon$, ce qui est équivalent à la convergence de (x_n). □

Proposition 2. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée. $(z_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$z_n = \sup_{k \geqslant n}\{x_k\}$$

converge vers un réel noté z.

Preuve. (x_n) est bornée et (z_n) est une sous-suite de (x_n) donc (z_n) est en particulier bornée inférieurement.

*EPFL

Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel que $E \neq \varnothing$. Soit $e \in \mathbb{R} \setminus E$. Alors si $e >= \sup E$, $\sup E \cup \{e\} = \sup\{e\} \geqslant \sup E$. Et si $e < supE$, $\sup E \cup \{e\} = \sup E \geqslant \sup E$.

Donc le sup d'un ensemble et d'un élément est toujours supérieur au sup de l'ensemble.

Donc, en particulier, (z_n) est décroissante par induction. Étant décroissante et bornée inférieurement, (z_n) converge vers un réel noté z qu'on peut aussi appeler le $\limsup$ de (x_n) puisque cette limite existe toujours pour des suites bornées. □

Théorème 1 (Bolzano-Weirestrass dans $\mathbb{R}$)**.** Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée. Alors $\exists \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante tel que $(x_{\varphi(n)})$ converge.

Preuve. Soit $(z_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $z_n = \sup_{k \geqslant n}\{x_k\}$ qui converge vers z. Par induction, on définit φ qui vérifie les propriétés

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}^*, |x_{\varphi(k)} - z| \leqslant \frac{1}{k} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k+1) > \varphi(k) \end{cases}$$

- On pose $\varphi(0) = 0$.

- On suppose avoir défini $\varphi(k)$ et on veut définir $\varphi(k+1)$.

  Par définition d'une limite, $\exists n_0 > \varphi(k)$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|z_n - z| \leqslant \frac{1}{2(k+1)}$.

  Par définition du sup, $\exists n_1 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $|x_n - z_n| \leqslant \frac{1}{2(k+1)}$

  Donc $\forall n \geqslant n_1$, $|x_n - z| \leqslant |x_n - z_n| + |z_n - z| \leqslant \frac{1}{k+1}$. Donc on pose $\varphi(k+1) = n_1$.

Ainsi, (x_{φ_n}) converge vers le $\limsup$ de (x_n) □

On peut maintenant s'intéresser au cas de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une suite $\mathbf{x}_k$ de $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ est *bornée* si $(||\mathbf{x}_k||)$ l'est (pour la norme euclidienne).

Proposition 3. Soit $\mathbf{x}_k = (x_{ik})_{i=1}^n \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ bornée. Alors les (x_{ik}) sont bornées.

Preuve. Par l'absurde, soit (x_{rk}) non bornée.

Or, $||\mathbf{x}_k|| = \sqrt{\Sigma_{i=1}^n x_{ik}^2} \geqslant \sqrt{x_{lk}^2} = |x_{lk}|$. Donc $(||\mathbf{x}_k||)$ ne serait pas bornée ce qui est absurde. □

Théorème 2 (Bolzano-Weirestrass dans $\mathbb{R}^n$)**.** Toute suite bornée de $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Preuve. Soit $\mathbf{x}_k = (x_{ik})_{i=1}^n \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ bornée. On va définir par induction sur n une application $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $(\mathbf{x}_{\varphi(k)})$ est convergente.

- Le cas $n = 1$ correspond au théorème de Bolzano-Weirestrass dans $\mathbb{R}$.
- On suppose avoir défini pour toute suite bornée $(\mathbf{y}_i) \in (\mathbb{R}^k)^{\mathbb{N}}$, une application $\varphi_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante tel que $(\mathbf{y}_{\varphi_k(i)})$ converge.

  Soit $(\mathbf{x}_i) = ((x_{mi})_{m=1}^n) \in (\mathbb{R}^{k+1})^{\mathbb{N}}$. On applique l'hypothèse de récurrence à $(\mathbf{z}_i) = ((x_{mi})_{m=1}^k)$. On a donc une application $\phi_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tel que $(\mathbf{z}_{\phi_k(i)})$ converge.

  Ensuite, on applique la théorème de Bolzano-Weirstrass dans $\mathbb{R}$ à $(x_{(k+1)\phi_k(i)})$ et on obtient une application $\pi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tel que $(x_{(k+1)\pi(\phi_k(i))})$ converge.

  Ainsi, soit $\varphi_{k+1} = \pi \circ \varphi_k$. Toute sous-suite d'une suite convergente converge: en particulier $(\mathbf{z}_{\pi(\phi_k(i))})$ converge. Donc $(\mathbf{x}_{\varphi_{k+1}(i)})$ converge.

De manière plus informelle, avec $(\mathbf{x}_i) = (x_{1i}, \ldots, x_{ni})$: on a une preuve en n étapes.

La première est d'appliquer Bolzano-Weirestrass dans $\mathbb{R}$ à la suite correspondant au premier composant du vecteur: (x_{1i}). On obtient ainsi une sous-suite (x_{1k_i}).

Maintenant on considère la sous-suite de $(\mathbf{x}_i)$, $(\mathbf{x}_{k_i})$ et on observe que la suite du premier composant converge.

On applique donc Bolzano-Weirestrass dans $\mathbb{R}$ à la suite du deuxième composant (x_{2k_i}) et on obtient une sous-suite convergente (x_{2l_i}).

Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente donc en particulier (x_{1l_i}) converge. Donc $(\mathbf{x}_{l_i})$ a ses deux premières composantes qui convergent.

On répète alors ce processus n fois jusqu'a obtenir une sous-suite $(\mathbf{x}_{m_i})$ tel que tous ses composantes convergente, et qui est donc convergente. $\square$