Équations Différentielles

Xavier Servot [*]

Février 2019

1 Introduction

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f \in I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On cherche $u \in \mathcal{C}_1(I)$ tel que

$$\forall t \in I, u'(t) = f(t, u(t))$$

Cette équation est une *équation différentielle*. Une solution de cette équation est appelée integrale de cette équation.

On va être confronté dans un premier temps au *problème de Cauchy*: soit $I = [0; +\infty[$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. On cherche l'intégrale de l'équation différentielle

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

Telle que la *condition de Cauchy* est vérifiée:

$$u(0) = u_0$$

On appelle solution locale du problème de Cauchy le couple (J, u) où J est de la forme $[t_0; t_0 + \varepsilon]$, $[t_0; t_0 + \varepsilon]$ ou $[t_0; +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$ et u une solution de l'équation

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

et qui vérifie la condition de Cauchy.

On dit que la solution locale (K, w) *prolonge strictement* (J, u) si $J \subset K, J \neq K$ et $\forall t \in J, u(t) = w(t)$

(J, u) est *maximale* si il n'existe pas de prolongement strict, et (J, u) est *globale* si $J = I$.

[*] EPFL

2 Équation à variables séparées

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Soit $I = [0; +\infty[$. Soit $g \in \mathcal{C}_0([0; +\infty[)$ et $k \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Soit $f \colon (t, y) \in I \times \mathbb{R} \to g(t)k(y)$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = g(t)k(u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

On veut montrer que le problème possède une solution locale. De manière très informelle, 'intution vient du fait que

$$u'(t) = g(t)k(u(t)) \Leftrightarrow \frac{u'(t)}{k(u(t))} = g(t)$$

Donc on aurait la relation:

$$\int \frac{du}{k(u)} = \int g(t)\, dt$$

Soit F l'intégrale de gauche et G de droite on a

$$F(u(t)) = G(t)$$

Supposer que k ne s'annule par sur l'intervalle d'integration implique que F est strictement monotone et possède donc une récirpoque F^{-1}. En particulier:

$$u(t) = F^{-1}(G(t))$$

Serait une soltion du pb. de Cauchy si la borne inférieure d'intégration de F est u_0. Maintenant pour la preuve:

On considère d'abord que $k(u_0) \neq 0$. Alors selon si $k(u_0) > 0$ ou $k(u_0) < 0$, par continuité $\exists \varepsilon > 0$ tel que k est strictement positive ou négative sur $]u_0 - \varepsilon; u_0 + \varepsilon[$. Alors

$$F(x) = \int_{u_0}^{x} \frac{1}{k}$$

est bien définie et strictement monotone sur cet intervalle. C'est la strict positivité ou négativité de k qui implique cette stricte monotonie.

Ainsi soit F^{-1} sa réciproque sur $]u_0 - \varepsilon; u_0 + \varepsilon[$. En particulier $F(u_0) = 0$ donc $F^{-1}(0) = u_0$.

F est strict. monotone et continue donc

$$\exists \mu_1, \mu_2 > 0 \text{ tel que } F(]u_0 - \varepsilon; u_0 + \varepsilon[) =]-\mu_1; +\mu_2[$$

Soit $\forall t \in \mathbb{R}, G(t) = \int_0^t g(s)ds$. Soit $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}$. On va en particulier s'intéresser à l'intervalle de valeurs de t pour lesquelles

$$G(t) \in]-\mu; +\mu[\subset]-\mu_1; +\mu_2[$$

$G(0) = 0$ donc par continuité c'est un ensemble bien défini: $\exists \delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [0; \delta[, G(t) \in]-\mu; +\mu[$$

On s'assure ici donc d'avoir un intervalle tel que

$$\forall t \in [0; \delta[, G(t) \in F(]u_0 - \varepsilon; u_0 + \varepsilon[)$$

et donc que $F^{-1}(G(t))$ soit bien défini sur cette intervalle. Notre intention est alors de prouver que $F^{-1}(G)$ est une solution au problème de Cauchy.

On vérifie que cette fonction vérifie la condition de Cauchy:

$$F^{-1}(G(0)) = F^{-1}(0) = u_0$$

Soit $\forall t \in [0; \delta[, u(t) = F^{-1}(G(t))$. Alors

$$F(u(t)) = G(t) \Rightarrow u'(t)F'(u(t)) = G'(t) \Leftrightarrow \frac{u'(t)}{k(u(t))} = g(t)$$

Donc $([0; \delta[, u)$ est une solution locale au problème de Cauchy énoncé. Elle est de plus unique au sens où si (K, w) est une solution locale, $u = w$ sur $K \cap J$ par construction: le problème implique que la solution soit de cette forme comme la preuve l'a montré.

Aussi, la preuve implique que si k ne s'annule jamais on a une solution maximale parce que le choix de ε se fait pour empêcher notre fonction k de s'annuler sur $]u_0 - \varepsilon; u_0 + \varepsilon[$.

Maintenant si $k(u_0) = 0$, on a la solution $u(t) = u_0, \forall t \in I$. Réciproquement, si k est la fonction nulle, alors la solution ne peut que être $u(t) = u_0$, u' étant nulle. Sinon soit $\varepsilon > 0$. $k(u_0) = 0$ et k et continue donc $\exists t_1 > 0$ tel que

$$k(t_1) = 0 \text{ et } \exists t \in [t_1; t_1 + \varepsilon[\text{ tel que } k(t) \neq 0$$

Comme u ne peut être que u_0 sur des intervalles tel que k est nulle, on considère que $\exists t_2 \in [t_1; t_1 + \varepsilon[$ tel que $u(t_2) \neq u_0$.

3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

3.1 Résolution

Soit $g, p \in \mathcal{C}_0([0; +\infty[)$. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + p(t)u(t) = g(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Cette équation différentielles est dit *linéaire du premier ordre* et

$$u'(t) + p(t)u(t) = 0$$

est dit *homogène*. On s'intéresse d'abord aux solutions de l'équation homogène. Intuitivement (et de manière informelle), on a $u' = -pu$ donc dériver u revient à la multiplier par $-p$. On s'attend alors que la solution soit de la forme $u = e^{-\int p}$ pour faire sortir $-p$ de u lorsqu'on la dérive.

Donc soit $c \in \mathbb{R}$ et soit $P(t) = \int_0^t p(s)\,ds$. Alors $P'(t) = p(t)$ et $u(t) = ce^{P(t)}$ est une solution de l'équation homogène.

On vérifie aussi que si v est une solution de l'équation homogène et que w est une solution de l'équation de base:

$$v'(t) + p(t)v(t) + w'(t) + p(t)w(t) = g(t)$$

Donc soit $u = v + w$,

$$u'(t) + p(t)u(t) = g(t)$$

u est une solution générale de l'équation linéaire du premier ordre. On a donc un solution de la forme

$$u(t) = w(t) + ce^{-P(t)}$$

On peut vérifier que c'est une solution de l'équation de base mais aussi réciproquement que toute solution est de cette forme:

Si w est une solution de l'équation de base alors en particulier $w + ce^{-P}$ est aussi une solution.

Il reste alors à calculer une solution particulière de l'équation de base. On va y arriver grâce à la technique de variation de constante: on va en fait chercher une solution générale de la forme

$$u(t) = c(t)e^{-P(t)}$$

où $c \in \mathcal{C}_0([0;+\infty[)$. En dérivant on obtient

$$u'(t) = c'(t)e^{-P(t)} - c(t)p(t)e^{-P(t)}$$

Et donc en tenant compte de l'équation de base on a la relation:

$$\begin{aligned} & c'(t)e^{-P(t)} - c(t)p(t)e^{-P(t)} + c(t)p(t)e^{-P(t)} = g(t) \\ \Leftrightarrow\ & c'(t)e^{-P(t)} = g(t) \\ \Leftrightarrow\ & c'(t) = g(t)e^{P(t)} \end{aligned}$$

En intégrant et en tenant compte de la condition de Cauchy on a

$$c(t) = \int_0^t g(s)e^{P(s)}\, ds + u_0$$

Et donc

$$u(t) = (u_0 + \int_0^t g(s)e^{P(s)}\, ds)e^{-P(t)}$$

est une solution du problème de Cauchy posé plus tôt. On a donc montré qu'on peut facilement calculer une solution, du moins si on en cherche une de la forme $c(t)e^{-P(t)}$ avec $c \in \mathcal{C}_0([0;+\infty[)$

3.2 Équation de Bernoulli

Soit $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Soit $p, q \in \mathcal{C}_0([0;+\infty[)$. On s'intéresse au problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) + p(t)y(t) = f(t)y^m(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

On va en fait montrer que c'est une équation linéaire du premier ordre. Soit $z \in \mathcal{C}_0([0;+\infty[)$ tel que $\forall x \in [0;+\infty[$,

$$z(t) = \frac{y(t)}{y^m(t)} = y^{1-m}(t)$$

Alors

$$z'(t) = (1-m)\frac{y'(t)}{y^m(t)}$$

On considère que $y_0 \neq 0$. Alors par continuité de y, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $y(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[0; \varepsilon[$. Et sur cet intervalle l'équation de Bernouilli se réecrit

$$\frac{y'(t)}{y^m(t)} + p(t)y^{1-m}(t) = f(x) \Leftrightarrow \frac{z'(t)}{1-m} + p(t)z(t) = f(x)$$

Et on reconnait une équation linéaire du premier ordre, qu'on sait déjà résoudre.

Comme pour les équations à variables séparées, on a que ε peut être arbitrement grand si y ne s'annule jamais. On ne s'intéressera pas à la résolution du problème de Cauchy à condition initiale nulle. (On ira quand même jusqu'a dire que $y = 0$ est une solution dans ce cas).

On note d'ailleurs que le cas $m \in \{0, 1\}$ est laissée de côté. Ces deux cas représentent des équations linéaire du premier ordre. Néanmoins, notre argumentation s'applique toujours pour le cas $m = 0$: z est bien défini et l'équation finale est bien équivalente à l'équation initiale. Par contre, la réecriture de l'équation serait non définie: Id^{-1} n'étant pas définie en 0.

4 Équations différentielles linéaires du deuxième ordre