Espace $\mathbb{R}^n$

Xavier Servot [*]

Février 2019

1 Introduction

On va introduire les définitions de manière élémentaire.

Définition 1.1 (Valeur absolue sur un corps)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une valeur absolue est une application

$$|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$$

Tel que $\forall x, y \in \mathbb{K}$

- $|x| = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{K}}$ (axiome de séparation)
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)
- $|xy| = |x| \cdot |y|$

Définition 1.2 (Produit scalaire)**.** Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Plus précisément, c'est une forme bilinéaire

$$\langle , \rangle \colon \begin{array}{l} V \times V \to \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle \end{array}$$

Tel que $\forall u, v \in V$

- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (symétrique)

[*]EPFL

- $\langle u, u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0_V$ (définie)
- $\langle u, u\rangle \geqslant 0_{\mathbb{R}}$ (positive)

Définition 1.3 (Norme sur un espace vectoriel)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$ et V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme sur V est une application

$$\langle,\rangle : \begin{matrix} V \to \mathbb{R} \\ v \mapsto ||v|| \end{matrix}$$

Tel que $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

- $||u|| = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow u = 0_V$ (séparation)
- $||\lambda u|| = |\lambda|||u||$ (absolue homogénéité)
- $||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||$ (inégalité triangulaire)

Proposition 1.1 (Valeur absolue standard)**.**

$$|\cdot|: \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases} \end{matrix}$$

Preuve. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

- Séparation: $|0| = 0$ par définition. Si $x \geqslant 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Sinon, $|x| = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Inégalité triangulaire: Déjà $\forall z \in \mathbb{R}$, $z \leqslant |z|$: si $z \geqslant 0$, $|z| = z \leqslant z$. Sinon $|z| = -z \leqslant z$. En particulier:

$$\text{Si } x + y \geqslant 0, |x + y| = x + y \leqslant |x| + |y|$$
$$\text{Sinon } x + y \leqslant 0, |x + y| = -x - y \leqslant |x| + |y|$$

- Pour $|xy| \geqslant 0 \Leftrightarrow |xy| = xy$ il y a deux cas:
  - $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ donc $|x| = x$ et $|y| = y$ donc $|x||y| = xy = |xy|$
  - $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$ donc $|x| = -x$ et $|y| = -y$ donc $|x||y| = xy = |xy|$

  Pour $|xy| < 0 \Leftrightarrow |xy| = -xy$ aussi:

- $x < 0$ et $y \geqslant 0$ donc $|x| = -x$ et $|y| = y$ donc $|x||y| = -xy = |xy|$
- $x \geqslant 0$ et $y < 0$ donc $|x| = x$ et $|y| = -y$ donc $|x||y| = -xy = |xy|$

$\square$

Proposition 1.2 (Produit scalaire standard)**.**

$$\langle , \rangle : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} \end{array}$$

est un produit scalaire, qu'on appelle *produit scalaire standard.* En particulier, avec $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \Sigma_{i=1}^n x_i y_i$$

Preuve. $\forall \mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^n, \mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^n, \mathbf{z} = (z_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$

- Symétrie:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \Sigma_{i=1}^n x_i y_i \\ &= \Sigma_{i=1}^n x_i y_i \\ &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

- Bilinéarité:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle &= \mathbf{x}^\top (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \\ &= \mathbf{x}^\top \mathbf{y} + \mathbf{x}^\top \mathbf{z} \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \end{aligned}$$

  La linéarité selon l'autre argument découle de la symétrie.

- Défini: On a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$. Or,

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow &\Sigma_{i=1}^n x_i^2 = 0 \end{aligned}$$

  Or si $\exists k \in \mathbb{N}_n$ tel que $x_k > 0$,

$$\Sigma_{i=1}^n x_i^2 \geqslant x_k > 0$$

  Ce qui est absurde, donc $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

- Positif: La fonction carré est à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ($\cdot^2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$) donc

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \Sigma_{i=1}^n x_i^2 \geqslant 0$$

par induction.

$\square$

Proposition 1.3 (Norme euclidienne)**.**

$$||\cdot|| \colon \begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \end{aligned}$$

est une norme, qu'on appelle la *norme euclidienne.*

Preuve. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

- Séparation: découle du fait que $\langle , \rangle$ est définie.
- Absolue homogénéité:

$$\begin{aligned} ||\lambda \mathbf{x}|| &= \sqrt{\langle \lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \\ &= |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}|| \end{aligned}$$

- Inégalité triangulaire: est prouvée via l'inégalité de Cauchy-Schwarz ci-dessous.

$\square$

Proposition 1.4 (Cauchy-Schwarz)**.**

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leqslant ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$$

Preuve. Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ Soit $P \colon \lambda \in \mathbb{R} \mapsto (||\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}||)^2$.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \langle \lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}, \lambda \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}, \lambda \mathbf{u} \rangle + \langle \lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \lambda \mathbf{u}, \lambda \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \lambda \mathbf{u} \rangle + \langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \lambda^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

Or, $P \geqslant 0$ par définition donc

$$\begin{aligned}\Delta(P) \leqslant 0 &\Leftrightarrow 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2 - 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leqslant ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.4.1. L'inégalité triangulaire est vérifiée pour la norme euclidienne.

Preuve. Soit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. On rappelle que $\langle , \rangle$ est positive donc en particulier $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle$. Ainsi:

$$\begin{aligned}&||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leqslant ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \\ \Leftrightarrow &\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}\rangle \leqslant \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \\ \Leftrightarrow &\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \leqslant \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \\ \Leftrightarrow &\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \leqslant ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||\end{aligned}$$

Donc l'inégalité triangulaire est impliquée par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et est donc vraie. □

On a aussi d'autres propriétés moins fondamentales sur la norme euclidienne.

Proposition 1.5 (Inégalité triangulaire inverse)**.** $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$|\,||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}||\,| \leqslant ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$$

Preuve. L'inégalité découle de l'inégalité triangulaire, bien qu'a première vue la valeur absolue semble inexpliquée. En fait on applique l'inégalité triangulaire pour $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ et $\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned}||\mathbf{x}|| &\leqslant ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| + ||\mathbf{y}|| \\ \Leftrightarrow ||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| &\leqslant ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||\end{aligned}$$

En faisant de même pour $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ et $\mathbf{x}$ on obtient:

$$||\mathbf{y}|| - ||\mathbf{x}|| \leqslant ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||$$

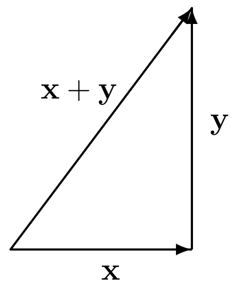
D'où

$$|\,||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}||\,| \leqslant ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$$

Qui est en fait une inégalité plus forte que les deux précédentes. □

Proposition 1.6 (Théorème de Pythagore)**.** $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$,

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$$



Preuve. Soit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 \end{aligned}$$

□

2 Topologie de $\mathbb{R}^n$

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$.

2.1 Ouvert - Intérieur

Définition 2.1. Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \colon ||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| < r\}$$

est la *boule ouverte* centrée en $\mathbf{a}$ et de rayon r.

Définition 2.2. Un point $\mathbf{a}$ est *intérieur* à E si il existe $r > 0$ tel que

$$B(\mathbf{a}, r) \subset E$$

On note $\mathring{E}$ l'ensemble des points intérieurs à E. E est un *ouvert* si $E = \mathring{E}$

Proposition 2.1. $\mathring{E}$ est le plus grand ouvert contenu dans E.

Preuve. Soit $A \subset E$ un ouvert. Alors $\forall \mathbf{x} \in A$, $\exists r > 0$ tel que

$$B(\mathbf{x}, r) \subset A \subset E$$

Donc $\mathbf{x}$ est aussi intérieur à E. Donc $A \subset \mathring{E}$. □

Proposition 2.2. Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert

Preuve. Soit $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ des ensembles ouverts. Soit $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$. Si E est vide, c'est un ouvert.

Sinon, soit $\mathbf{x} \in E$. $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{x} \in E_k$ sinon E serait vide. Et donc $\exists r > 0$ tel que $B(\mathbf{x}, r) \subset E_k \subset E$. Donc $\mathbf{x}$ est un point intérieur de E par définition, et E est donc un ouvert. □

Proposition 2.3. Tout intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Preuve. Soit $(E_i)_{i=1}^{k}$ des ensembles ouverts. Soit $E = \cap_{i=1}^{k} E_k$. Si E est vide, c'est un ouvert.

Sinon soit $\mathbf{x} \in E$: $\forall i \in \mathbb{N}_k, \mathbf{x} \in E_i$. Donc $\exists (r_i)_{i=1}^{k}$ tel que $B(\mathbf{x}, r_i) \subset E_i$. Soit $r = \min_{i=1}^{k} r_i$. Alors $\forall i \in \mathbb{N}_k$, $B(\mathbf{x}, r) \subset E_i$. Donc

$$B(\mathbf{x}, r) \subset (\cap_{i=1}^{k} E_i) = E$$

□

Proposition 2.4. Tout intersection quelconque d'ouverts n'est pas forcément un ouvert

Preuve. Soit $\forall i \in \mathbb{N}$, $E_i = \{\mathbf{x} \colon ||\mathbf{x}|| < \frac{1}{i}\}$. Soit $E := \cap_{i=1}^{\infty} E_i$. Soit $\mathbf{x} \in E$.

$$\forall i \in \mathbb{N}, ||\mathbf{x}|| < \frac{1}{i} \Leftrightarrow ||\mathbf{x}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Donc $E = \{\mathbf{0}\}$ est un fermé. □

2.2 Fermé - Adhérence

Définition 2.3. E est *fermé* si $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ est ouvert.

Proposition 2.5. E est fermé si et seulement si toute suite convergente de E converge vers un élément de E.

Preuve. Soit E un fermé et $(\mathbf{x}_k) \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\mathbf{x}$. Alors $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \geqslant k_0, ||\mathbf{x}_k - \mathbf{x}|| < \varepsilon$$

. Par l'absurde, $\mathbf{x} \in E^c$. Alors $\exists r > 0$ tel que

$$\{\mathbf{y} \colon ||\mathbf{y} - \mathbf{x}|| < r\} \subset E^c$$

. Alors en particulier par définition de la convergence,

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}, r) \subset E^c$$

Or $\mathbf{x}_k \in E$ par définition.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Toute suite de $E^{\mathbb{N}}$ converge vers un élément de E. Par l'absurde, E n'est pas fermée. Alors $\exists \mathbf{x} \in E^c$ tel que

$$\forall r > 0, B(\mathbf{x}, r) \nsubseteq E^c$$

Donc

$$\forall r > 0, \exists \mathbf{y} \in E \text{ tel que } ||\mathbf{y} - \mathbf{x}|| < r$$

Donc en particulier $\exists (\mathbf{y}_k) \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$||\mathbf{y}_k - \mathbf{x}|| < \frac{1}{k}$$

Donc $(\mathbf{y}_k)$ est un suite à termes dans E qui converge vers un élément de E^c, ce qui est absurde. □

Définition 2.4. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à E si $\forall r > 0$,

$$B(\mathbf{a}, r) \cap E \neq \varnothing$$

L'ensemble des points adhérents à E est l'*adhérence* notée $\overline{E}$

Par définition, l'adhérance de E sont les points qui ne sont pas à l'intérieur de E^c: la boule $B(\mathbf{a}, r)$ n'est jamais complètement dans E^c puisqu'elle admet un point dans E.

Proposition 2.6. $\overline{E}$ est fermé

Preuve. Par définition, $\overline{E} = (\mathring{E^c})^c$. Le complémentaire de $\overline{E}$ est ouvert donc $\overline{E}$ est fermé. □

Proposition 2.7. $\overline{E} = (\mathring{E^c})^c$

Preuve. $\overline{E}$ est défini comme l'ensemble des points $\mathbf{a}$ qui tel que $\forall r > 0$,

$$B(\mathbf{a}, r) \cap E \neq \varnothing$$

dont la négation est: $\exists r > 0$ tel que

$$B(\mathbf{a}, r) \cap E = \varnothing \Leftrightarrow B(\mathbf{a}, r) \subset E^c$$

dont les points de $\overline{E}$ sont les points qui ne sont pas dans $\mathring{E^c}$. □

Proposition 2.8. $\mathbf{x} \in \overline{E} \Leftrightarrow \mathbf{x}$ **est la limite d'une suite de** $E^{\mathbb{N}}$.

Preuve. Si $\mathbf{x} \in E$, la suite constante $(\mathbf{y}_k)$ où $\forall i \in \mathbb{N}, \mathbf{y}_i = \mathbf{x}$ converge vers $\mathbf{x}$.

Sinon $\mathbf{x} \in \overline{E} \setminus E$. On rappelle que par définition de $\overline{E}$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathbf{z} \in E \text{ tel que } ||\mathbf{x} - \mathbf{z}|| < \varepsilon.$$

Soit $\mathbf{z}_i \in E$ tel que

$$||\mathbf{x} - \mathbf{z}_i|| < \frac{1}{i}$$

En particulier $(\mathbf{z}_k)$ est une suite de $E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément de $\overline{E}$.

Réciproquement, soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la limite d'une suite $(\mathbf{x}_k) \in E^{\mathbb{N}}$. Par l'absurde, soit $\mathbf{x} \in \mathring{E^c}$. Alors

$$\exists r > 0 \text{ tel que } B(\mathbf{x}, r) \subset E^c \Rightarrow \forall \mathbf{y} \in E, ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \geqslant r$$

Or par convergence $(\mathbf{x}_k)$,

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } ||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|| < r$$

Or $\mathbf{x}_n \in E$ donc c'est absurde. □

Proposition 2.9. E **est fermé** $\Leftrightarrow E = \overline{E}$

Preuve. Soit E fermé. Alors $E^c = \mathring{E^c}$ donc

$$\overline{E} := (\mathring{E^c})^c = (E^c)^c = E$$

Soit $\overline{E} = E$. $\overline{E}$ est fermé donc E est fermé. □

Proposition 2.10. $\overline{E}$ **est le plus petit ensemble fermé contenant** E.

Preuve. Soit $A = E \cup X \in \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé contenant E. Alors

$$A^c = E^c \cap X^c$$

Donc $\forall \mathbf{a} \in A^c$,

$$\exists r > 0 \text{ tel que } B(\mathbf{a}, r) \subset A^c \subset E^c$$

Donc $A^c \subset \mathring{E^c}$ et $\overline{E} \subset A$, ce qui implique que $\overline{E}$ est le plus petit fermé contenant E. □

2.3 Compacité

Définition 2.5. E est *borné* si

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall \mathbf{x} \in E, \, ||\mathbf{x}|| < M$$

E est *compact* si il est fermé et borné.

Proposition 2.11. L'adhérence d'un borné est compact.

Preuve. Soit $E \in \mathbb{R}^n$. $\overline{E}$ est fermé. Il reste à montrer que $\overline{E}$ est borné.

Par l'absurde, $\overline{E}$ est non borné. Alors

$$\exists (\mathbf{y}_k) \in \overline{E}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } ||\mathbf{y}_i|| > i$$

Or

$$\forall i \in \mathbb{N}, \, \mathbf{y}_i \in \overline{E}$$

Donc par induction

$$\exists (\mathbf{x}_k) \in E^{\mathbb{N}} \text{ tel que } ||\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i|| < 1$$

Et donc $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & ||\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i|| < 1 \\ \Leftrightarrow & ||\mathbf{x}_i|| > ||\mathbf{y}_i|| - 1 \\ \Leftrightarrow & ||\mathbf{x}_i|| > i - 1 \end{aligned}$$

Donc $(\mathbf{x}_k) \in E^{\mathbb{N}}$ avec E borné n'est pas borné ce qui est absurde. □

Proposition 2.12. E est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de E, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E.

Preuve. Si E est compact, elle est bornée et donc le théorème de Bolzano-Weierstrass s'applique sur les suites de $E^{\mathbb{N}}$. Ensuite E est fermé donc égal à $\overline{E}$ et les suites convergentes de $E^{\mathbb{N}}$ convergent vers un élément de $\overline{E} = E$.

Réciproquement, soit $E \in \mathbb{R}^n$ tel que de toute suite d'éléments de E on peut extraire une sous-suite convergente. Si E est non-borné,

$$\exists (\mathbf{x}_k) \in E^{\mathbb{N}} \text{ tel que } ||\mathbf{x}_i|| > i$$

Et $\exists \mathbf{x} \in E, \exists \varphi\colon \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strict. croissante tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists i_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall i \geqslant i_0, ||\mathbf{x}_{\varphi(i)} - \mathbf{x}|| < \varepsilon$$

En particulier, $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall i \geqslant i_0$,

$$\begin{aligned} &||\mathbf{x}_{\varphi(i)} - \mathbf{x}|| < 1 \\ \Leftrightarrow &||\mathbf{x}_{\varphi(i)}|| - 1 < ||\mathbf{x}|| \\ \Leftrightarrow &\varphi(i) - 1 < ||\mathbf{x}|| \end{aligned}$$

Ce qui est absurde puisque $\mathbf{x}$ est une constante.

Ensuite, on montre que $\overline{E} = E$. Et comme l'adhérence d'un borné est compact on aura finalisé la preuve.

On a que $\mathbf{x}$ est dans $\overline{E}$ si et seulement si $\mathbf{x}$ est la limite d'une suite de $E^{\mathbb{N}}$. Donc soit $\mathbf{x} \in \overline{E}$ et $(\mathbf{x}_k) \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\mathbf{x}$.

Par hypothèse, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E et pour les suites convergentes, suite et sous-suite on la même limite.

Donc $\mathbf{x} \in E$ et $E = \overline{E}$ □

Définition 2.6. $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ est un *recouvrement* de E si

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

Un recouvrement est fini si $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > k_0$, $E_k = \varnothing$. On va plutôt noter un recouvrement fini par $(E_i)_{i=1}^{k_0}$

Un recouvrement est *non trivial* si $\forall i \in \mathbb{N}^*, E_i \cap E \neq \varnothing$

Théorème 2.1 (Heine-Borel-Lebesgue)**.** *E est compact si est seulement si de tout recouvrement quelconque de E par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini.*

Preuve. □

2.4 Bord

Définition 2.7. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ est un *point frontière* de E si il est adhérent à E et à E^c. L'ensemble des points frontières de E est le *bord* de E, ∂E.

Proposition 2.13. ∂E est fermé

Preuve. $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$, donc $(\partial E)^c = \overline{E}^c \cup \overline{E^c}^c$. Donc le complémentaire de ∂E est une réunion d'ouverts et est donc un ouvert (l'adhérence d'un ensemble est fermé donc son complémentaire est ouvert). Donc ∂E est fermé. $\square$

Proposition 2.14. $\partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E}$

Preuve. $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c} = \overline{E} \cap (\mathring{E})^c$, i.e. l'ensemble des points de $\overline{E}$ qui ne sont pas dans $\mathring{E}$: $\overline{E} \setminus \mathring{E}$. $\square$

Corollaire 2.14.1. $\partial B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon ||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| = r\}$

Preuve. On a que $\overline{B(\mathbf{a}, r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon ||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| \leq r\}$ et $B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon ||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| < r\}$ est ouvert: le corollaire est directe. $\square$

2.5 Connexité

2.5.1 Connexité par arcs

Définition 2.8. Soit $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathcal{C}^0([0;1])^n$. Alors une application

$$\boldsymbol{\gamma} \colon \begin{aligned} [0;1] &\to E \\ x &\mapsto (\gamma_1(x), \ldots, \gamma_n(x)) \end{aligned}$$

est un *chemin* de E d'origine $\boldsymbol{\gamma}(0)$ et d'extrémité $\boldsymbol{\gamma}(1)$.

Définition 2.9. E est *connexe par arcs* si pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ de E, il existe un chemin d'origine $\mathbf{a}$ et d'extrémité $\mathbf{b}$.

Proposition 2.15. Un ouvert est connexe par arcs si et seulement si il n'est pas la réunion de deux ouverts disjoints

Preuve. Soit E un ouvert connexe par arcs. Par l'absurde

$$E = E_1 \sqcup E_2 \qquad\qquad E_1, E_2 \neq \varnothing \text{ ouverts}$$

Soit $\mathbf{a} \in E_1$ et $\mathbf{b} \in E_2$ et soit $\boldsymbol{\gamma}$ le chemin qui relie $\mathbf{a}$ à $\mathbf{b}$. On a donc $\boldsymbol{\gamma}(0) \in E_1$ et $\boldsymbol{\gamma}(1) \in E_2$.

Soit $X = \{x \colon x \in [0;1], \boldsymbol{\gamma}(x) \in E_2\}$. On va considérer $x_* = \inf X$, qui existe puisque l'ensemble est non-vide ($1 \in X$) et borné ($X \subset [0;1]$).

On va considérer que $\boldsymbol{\gamma}(x_*) \in E_2$, si ce n'est pas le cas on applique le raisonnement suivant à $(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ avec le chemin $\boldsymbol{\gamma}'\colon x \mapsto \boldsymbol{\gamma}(1-x)$. Par définition, $\boldsymbol{\gamma}([0; x_*[) \subset E_1$. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\boldsymbol{\gamma}(x_*) = (\gamma_1(x_*), \ldots, \gamma_n(x_*))$. Par continuité des composantes de $\boldsymbol{\gamma}$, $\exists(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ tel que

$$\forall x \in]x_* - \delta_i; x_*[, |\gamma_i(x_*) - \gamma_i(x)| < \frac{\varepsilon}{n}$$

Alors en prenant $\delta = \min_{i=1}^n \delta_i$, on a en particulier $\forall x \in]x_* - \delta; x_*[$,

$$||\boldsymbol{\gamma}(x) - \boldsymbol{\gamma}(x_*)|| \leq \sqrt{(n\frac{\varepsilon}{n})^2} = \varepsilon$$

i.e. on peut créer une suite d'éléments de E_1 qui converge vers un élément de E_2 et cet élément ne serait alors pas à l'intérieur de E_2.

Réciproquement, l'argument ci-dessus s'applique aussi si on part d'une réunion de deux ouverts disjoints et qu'on admettait une connexité par arcs. $\square$

2.5.2 Connexité

Définition 2.10. E est *connexe* si pour tout couple d'ouverts (A, B), avec $A_1 = E \cap A$ et $B_1 = E \cap B$ les intersections entre E et ces dits ouverts,

$$E = A_1 \cup B_1 \text{ et } A_1 \cap B_1 = \varnothing \Rightarrow A_1 = \varnothing \text{ ou } B_1 = \varnothing$$

Proposition 2.16. Un ouvert est connexe si et seulement si il n'est pas la réunion de deux ouverts disjoints.

Preuve. Soit E un connexe tel qu'il existe E_1, E_2 ouverts tel que

$$E = E_1 \sqcup E_2 \qquad\qquad E_1, E_2 \neq \varnothing$$

Alors en particulier en appliquant la définition de la connexité, pour le couple d'ouverts (E_1, E_2), on a $A_1 = E_1$ et $B_1 = E_2$ et donc par définition $E = A_1 \sqcup B_1$, mais $A_1, B_1 \neq \varnothing$, ce qui est absurde.

Réciproquement, soit E un ensemble qui n'est pas la réunion de deux ouverts disjoints non vides. Soit A, B deux ouverts disjoints, i.e. $A \cap B = \varnothing$. Alors si

$$A_1 := E \cap A \qquad B_1 := E \cap B \qquad E = A_1 \cup B_1$$

sans pour autant que $A_1 = \varnothing$ ou $B_1 = \varnothing$, on aurait alors en particulier que E est la réunion de deux ouverts par $E = A_1 \cup B_1$ (une intersection finie de deux ouverts est un ouvert et une réunion de deux ouverts est un ouvert) et surtout deux ouverts disjoints: $(A, B$ sont disjoints)

$$A_1 \cap B_1 = A \cap B \cap E = \varnothing$$

Ce qui est evidemment absurde, alors il faut forcément qu'un des (A_1, B_1) soit $\varnothing$ pour que E ne soit pas la réunion de deux ouverts disjoints non vides, ce qui est la définition de la connexité. $\square$