Intégrales dans $\mathbb{R}$

Xavier Servot [*]

Février 2019

Une *subdivision* d'un compact $[a; b]$ est un liste finie de réels $(x_i)_{i=0}^n$ tel que:

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, x_{i+1} > x_i \qquad\qquad x_0 = a \text{ et } x_n = b$$

- Soit $\sigma = (x_i)_{i=0}^n$ une subdivision de $[a; b]$
- $\forall j \in \mathbb{N}_n$, $h_j = x_j - x_{j-1}$
- $\forall j \in \mathbb{N}_n$, $M_j = \max_{[x_{j-1}; x_j]} f$
- $\forall j \in \mathbb{N}_n$, $m_j = \min_{[x_{j-1}; x_j]} f$
- $h_\sigma = \max_{j=1}^n h_j$

On définit les *sommes de Darboux* de f pour la subdivision σ:

- Somme de Darboux inférieure:

$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{i=1}^n m_i h_i$$

- Somme de Darboux supérieure:

$$\overline{S}_\sigma(f) = \sum_{i=1}^n M_i h_i$$

[*]EPFL

Et ensuite on définit

$$\overline{S} = \inf\{\overline{S}_\sigma(f) \,|\, \text{subdivision } \sigma\}$$
$$\underline{S} = \sup\{\underline{S}_\sigma(f) \,|\, \text{subdivision } \sigma\}$$

Théorème 1. Soit $f \in \mathcal{C}_0([a;b])$. Alors

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$$

Preuve. f est continue sur un compact donc uniformément continue. En particulier: soit $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a;b], |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{b-a}$$

Soit σ une subdivision tel que $h_\sigma < \delta$. Alors $\forall j \in \mathbb{N}_n$, $\exists z, t \in [x_{j-1}; x_j]$ tel que

$$M_j - m_j = f(z) - f(t) < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{b-a}$$

En particulier on a

$$\begin{aligned}\overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) &= \sum_{j=1}^{n} M_j h_j - \sum_{j=1}^{n} m_j h_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} h_j (M_j - m_j) < (b-a)\frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

Ensuite, par définition de inf, $\exists \sigma_1$ subdiv. tel que $h_{\sigma_1} < \delta$ et

$$0 \leq \overline{S}_{\sigma_1}(f) - \overline{S}(f) < \frac{\varepsilon}{3}$$

De même pour le sup avec σ_2 une subdiv. tel que $h_{\sigma_2} < \delta$ et

$$\frac{\varepsilon}{3} > \underline{S}(f) - \underline{S}_{\sigma_2}(f) \geq 0$$

Les propriétés restent vraies pour $\sigma_* = \sigma_1 \cup \sigma_2$ et en particulier on a:

$$\begin{aligned}|\overline{S}(f) - \underline{S}(f)| &< |\overline{S}(f) - \overline{S}_{\sigma_*}(f)| + |\overline{S}_{\sigma_*}(f) - \underline{S}_{\sigma_*}(f)| + |\underline{S}_{\sigma_*}(f) - \underline{S}(f)| \\ &< 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

$\square$

On pose pour $f \in \mathcal{C}_0([a;b])$,

$$\int_a^b f = \overline{S}(f) = \underline{S}(f)$$

Théorème 2 (Théorème de la moyenne)**.** $\forall f \in \mathcal{C}_0([a;b])$, $\exists c \in [a;b]$ tel que

$$f(c) \cdot (b-a) = \int_a^b f$$

Preuve. Soit $m = \min_{[a;b]} f$ et $M = \max_{[a;b]} f$. En particulier $\forall j \in \mathbb{N}_n$, $M_j \leq M$ et $m_j \geq m$ donc

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f \leq M \cdot (b-a)$$

Et f étant continue, $\operatorname{Im} f([a;b]) = [m;M]$ donc $\exists c \in [a;b]$ tel que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f}{b-a}$$

□

Soit $f \in \mathcal{C}_0([a;b])$. F est une *primitive* de f si elle est continue sur $[a;b]$ et si

$$\forall x \in]a;b[, F'(x) = f(x)$$

Théorème 3. Soit $f \in \mathcal{C}_0([a;b])$. Soit $\forall x \in [a;b], F(x) = \int_a^x f$. Alors F est une primitive de f

Preuve. Soit $x_0 \in [a;b[$. Soit $x > x_0$. Par le théorème de la moyenne, $\exists c(x) \in [x_0;x]$ tel que

$$f(c(x)) = \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0}$$

Or,

$$\int_{x_0}^x f = F(x) - F(x_0)$$

Donc on a

$$f(c(x)) = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

Or par continuité de f,

$$\lim_{x \to x_0} c(x) = x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(c(x)) = f(x_0)$$

Et par définition de la dérivée

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0)$$

En particulier on a donc $\forall x_0 \in [a; b[$,

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

On va montrer que c'est aussi vrai en b: soit $x < b$. Par le théorème de la moyenne, $\exists d(x) \in [x; b]$ tel que

$$f(d(x)) = \frac{\int_x^b f}{b - x}$$

Et par le même raisonnement,

$$\lim_{x \to b} f(d(x)) = \lim_{x \to b} \frac{F(b) - F(x)}{b - x}$$
$$\Rightarrow f(b) = F'(b)$$

Donc F est une primitive de f: étant dérivable sur $[a; b]$ elle est continue sur cette intervalle. □

Proposition 1. Si F et G sont deux primitives de $f \in \mathcal{C}_0([a; b])$, $F - G$ est une fonction constante sur $[a; b]$

Preuve. Soit $\forall x \in [a; b], H(x) = F(x) - G(x)$. Alors,

$$\forall x \in [a; b], H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Donc H est une fonction constante.

On peut rappeler la preuve qui implique que si une fonction est de dérivée nulle elle est constante: $\forall c < d \in [a; b]$, $\exists \alpha \in]c; d[$ tel que

$$H'(\alpha)(d - c) = H(d) - H(c) \Rightarrow H(d) = H(c)$$

Donc les images de H sont toutes égales donc c'est une fonction constante □