Preuve du théorème spectral

Xavier Servot [*]

Janvier 2019

1 Le cas des matrices

Ici, $\mathbb{K}$ désigne un corps, et $\mathcal{M}[\mathbb{K}]$ est l'ensemble des matrices de taille $n \in \mathbb{N}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1.1 Preuve standard pour un corps muni d'une forme bilinéaire symétrique

Dans le reste de la section, on admet que $\mathbb{K}$ est muni d'une forme bilinéaire *symétrique*. On note cette forme bilinéaire $\langle , \rangle$ sauf mention contraire. On rappelle d'abord une définition nécessaire pour ennoncer le théorème qu'on veut prouver.

Définition 1.1.1 (Congruence)**.** Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}[\mathbb{K}]$ sont congruentes si il existe une matrice inversible $U \in \mathcal{M}[\mathbb{K}]$ tel que $B = U^\top AU$.

On va prouver la version suivante du théorème spectral:

Théorème. Toute matrice $A \in \mathcal{M}[\mathbb{K}]$ symétrique est congruente à une matrice diagonale de $\mathcal{M}[\mathbb{K}]$.

La preuve de cette section est non élémentaire dans le sens où aucune définition de base ne va être rappelée.

---

[*]EPFL

Définition 1.1.2 (Coefficient de Fourrier)**.** Soit $(u, v) \in V$ tel que $\langle v, v\rangle \neq 0$. On définit le coefficient de Fourrier $\alpha_{u,v}$ par

$$\alpha_{u,v} = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

Définition 1.1.3. Une base $(b_i)_{i=1}^r$ d'un espace vectoriel est *orthogonale* si

$$\forall i \in \mathbb{N}_r \, \forall j \in \mathbb{N}_r \setminus \{i\}, \langle b_i, b_j\rangle = 0.$$

On rappelle aussi que soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, il existe une matrice A tel que $\forall u, v \in V$, $\langle u, v\rangle = u^\top Av$. En particuler: soit (a_{ij}) le coefficient de la ligne i et de la colonne j de A, et $(b_i)_{i=1}^r$ une base de V, on a

$$a_{ij} = \langle b_i, b_j\rangle$$

Cela donne l'intuition que pour prouver le théorème spectral tel qu'énnoncé plus tôt il suffit de trouver une base orthogonale pour V: on aurait ainsi $a_{ij} = \langle b_i, b_j\rangle = 0$ et donc A serait congruent à une matrice diagonale grâce à un changement de base bien choisi.

Définition 1.1.4 (Caractéristique)**.** La caractéristique d'une anneau unitaire $\mathcal{R}$, notée $\operatorname{Char}\mathcal{R}$, est l'ordre du groupe abélien $(\mathcal{R}, +)$ i.e. est le plus petit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que:

$$\Sigma_{i=1}^k e_{(\mathcal{R},+)} = 0$$

Si l'ordre de ce groupe est infini la caractéristique vaut 0 par convention.

Proposition 1.1.1. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si $\operatorname{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$, et $\forall u \in V$, $\langle u, u\rangle = 0$ alors

$$\forall u, v \in V, \ \langle u, v\rangle = 0$$

Preuve. Soit $u, v \in V$. On rapelle que $\langle , \rangle$ est symétrique.

$$\begin{aligned} \langle u+v, u+v\rangle &= 0 \\ \text{et } \langle u+v, u+v\rangle &= \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= 2\langle u, v\rangle \end{aligned}$$

Donc $\langle u, v\rangle = 0$ étant donné que dans $\mathbb{K}$, $2 \neq 0$. □

Proposition 1.1.2. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si $\text{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$, il existe toujours une base orthogonale de V.

Preuve. On va prouver cette proposition par récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel.

- Soit V de dimension 1. V possède une base orthogonale par définition puisqu'elle est composée d'un seul vecteur.

- Soit V de dimension $k \geqslant 2$. Si la forme bilinéaire est telle que $\forall v \in V, \langle v, v\rangle = 0$, on a par la proposition précédente que $\forall v, w \in V, \langle u, v\rangle = 0$ et donc toute base est orthogonale. Sinon, soit $u \in V$ tel que $\langle u, u\rangle \neq 0$. On a $\forall x \in V \setminus \{u\}$ que

  $$y = x - \alpha_{xu} u$$

  est tel que

  $$\begin{aligned} \langle u, y\rangle &= \langle u, x\rangle - \frac{\langle u, x\rangle}{\langle u, u\rangle}\langle u, u\rangle \\ \Leftrightarrow \langle u, y\rangle &= 0 \end{aligned}$$

  En particuler, soit $V_* = \{u\}$ et $V_*^\perp$ l'ensemble des vecteurs de V orthogonaux à V_*. On vient de voir que ce sont tous les vecteurs de $V \setminus V_*$. Donc $V = V_* + V_*^\perp$. C'est en fait en somme directe: u n'est pas orthogonal à lui même par définition.

  $\dim(V_*) = 1$ donc $\dim(V_*^\perp) = k - 1$ et par hypothèse de récurrence, les espaces de dimension $k-1$ possèdent une base orthogonale, notée $(u_i)_{i=1}^{k-1}$. Dont en posant $u_k = u$, on a que $(u_i)_{i=1}^{k}$ est une base orthogonale de V.

$\square$

Théorème (Spectral)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps tel que $\text{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}[\mathbb{K}]$ symétrique. A est congruente à une matrice diagonale.

Preuve. Soit $\mathbb{K}^n$ munie de la forme bilinéaire définie par $\forall u, v \in \mathbb{K}^n$, $\langle u, v\rangle = u^\top Av$. A étant symétrique, $\langle, \rangle$ l'est aussi. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par la proposition précédente, K^n possède une base orthogonale $\mathcal{C}$.

On dénote la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ par $I_{\mathcal{BC}}$ et de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ par $I_{\mathcal{CB}}$. Ensuite, soit $A_{\mathcal{B}}, A_{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}[\mathbb{K}]$ les matrices représentant la forme bilinéaire $\langle , \rangle$ selon les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ respectivement. On a que $\forall u, v \in V$,

$$\langle u, v\rangle = [u]_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot A \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

Et

$$\langle u, v\rangle = [u]_{\mathcal{C}}^{\top} \cdot A_{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{C}}$$

Or $\forall x \in V$

$$[x]_{\mathcal{C}} = I_{\mathcal{BC}}[x]_{\mathcal{B}}$$

Et donc en particulier

$$\begin{aligned}
&\langle u, v\rangle = (I_{\mathcal{BC}} \cdot [u]_{\mathcal{B}})^{\top} \cdot A_{\mathcal{C}} \cdot I_{\mathcal{BC}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} \\
\Leftrightarrow\ &\langle u, v\rangle = [u]_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot I_{\mathcal{BC}}^{\top} \cdot A_{\mathcal{C}} \cdot I_{\mathcal{BC}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} \\
\Leftrightarrow\ &A = I_{\mathcal{BC}}^{\top} \cdot A_{\mathcal{C}} \cdot I_{\mathcal{BC}}
\end{aligned}$$

$\mathcal{C}$ étant orthogonale pour $\langle , \rangle$, on a bien que A est congruente à une matrice diagonale, en particulier à $A_{\mathcal{C}}$. □

1.2 Un algorithme pour un corps muni d'une forme bilinéaire symétrique

Dans la section précédente, on a prouvé le Théorème Spectral sans proposer de méthode de calcul des matrices associées. On peut cependant faire mieux en proposant une preuve constructiviste du théorème.

D'abord, on va rappeler les définitions d'outils essentiels à la preuve: Soit $G_{ij}(\lambda)$ la matrice élémentaire telle que:

- $G_{ij}(\lambda) \cdot A$ est la matrice A à laquelle on a ajouté sa ligne i λ fois à sa ligne j
- $A \cdot G_{ij}(\lambda)^{\top}$ est la matrice A à laquelle on a ajouté sa colonne i λ fois à sa colonne j

Soit $B_{ij} \in \mathcal{M}[\mathbb{K}]$ définie par:

$$b_{kl} = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut vérifier que

$$G_{ij}(\lambda) = \mathrm{Id}_n + B_{ij}$$

vérifie les propriétés ennoncées ci-dessus.

Algorithme. Soit $A \in \mathcal{M}[\mathbb{K}]$ symétrique, avec $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$. On définit

$$\phi_{ij\lambda} \colon A \in \mathcal{M}[\mathbb{K}] \mapsto G_{ij}(\lambda) \cdot A \cdot G_{ij}(\lambda)^\top$$

L'algorithme consiste à effectuer de manière procédurale les sous-algorithmes $(E_k)_{k=1}^n$, où l'algorithme E_i est défini par:

argument : Une matrice A symétrique
si $a_{ii} \neq 0$ **alors**
    $A \longleftarrow (\bigcirc_{k=i}^n \phi_{ik(-a_{ki}a_{ii}^{-1})})(A)$;
sinon
    si *un des* $(a_{ik})_{k=i}^n$ *est non nul* **alors**
        Soit a_{ik} un tel coefficient;
        $A \longleftarrow \phi_{ki1_{\mathbb{K}}}(A)$;
    sinon
        // Tous les coefficients de la ligne i et de la colonne i sont nuls;
    fin
fin

De manière plus informelle, à l'etape i, on nullifie les coefficients de la ligne i et de la colonne i en appliquant $\phi_{ik(-a_{ki}a_{ii}^{-1})}$ à tous les k de i à n. On peut vérfifier qu'appliquer cette transformation rend en effet les coefficients a_{ik} et a_{ki} nuls parce qu'ils deviennent $a_{ik} - a_{ik}a_{ii}^{-1}a_{ii} = 0$. Si il n'y a pas possibilité de faire cela (i.e. a_{ii}^{-1} n'existe pas donc quand le coefficient est nul), on cherche un des coefficients (notons a_{ik}) de la ligne i (ou de la colonne i, peu importe puisque la matrice est symétrique) qui est non nul pour multiplier la ligne k à la ligne i et la colonne k à la colonne i. Comme $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$, le coefficient a_{ii} qui vaut maintenant $2a_{ik}$ est non nul et on peut revenir au premier cas de l'étape i cité plus haut. Sinon tous les coefficients de la ligne et la colonne i sont nuls et donc on peut passer à l'étape suivante.

Théorème. L'algorithme ennoncé ci-dessus est correcte dans le sens où il démontre le Théorème Spectral et se termine.

Preuve. Déjà, il y a un nombre d'étapes fini donc l'algorithme se termine.

Ensuite

- La transformation $\phi_{ij\lambda}$ donne lieu à une matrice congruente à celle d'origine, donc on est sûr d'avoir en tout point de l'algorithme une matrice congruente à A, la matrice d'origine.

- L'algorithme passe de l'étape i à l'étape $i+1$ seulement si les coefficients $\{a_{ik} \,|\, k \in \{i+1, n\}\} \cup \{a_{ki} \,|\, k \in \{i+1, n\}\}$ sont nuls. (On rappele que A est symétrique donc $\phi_{ik(-a_{ki}a_{ii}^{-1})}(A) = \phi_{ik(-a_{ik}a_{ii}^{-1})}(A)$. Donc on peut prouver par induction qu'à l'étape n, seuls les coefficients diagonaux peuvent être non-nuls.

On obtient ainsi une matrice diagonale et congruente à la matrice d'origine. □

Corollaire. Tout matrice symétrique $A \in \mathcal{M}[\mathbb{K}]$ est diagonalisable dans le sens où il existe une matrice $U \in \mathcal{M}[\mathbb{K}]$ orthogonale et une matrice $D \in \mathcal{M}[\mathbb{K}]$ diagonale tel que

$$A = P^\top AP$$

Preuve. $G_{ij}(\lambda)^\top = G_{ij}(\lambda)^{-1}$ □

1.3 Dans la pratique: calcul dans un espace préhilbertien

On va donner ici la méthode standard pour calculer la matrice diagonale et la matrice de changement de base dans le cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ munis d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ (forme bilinéaire définie positive).

Déjà, pour alléger les arguments de cette section, on va prouver qu'on peut se cantonner à l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ par isomorphisme.

Théorème 1.3.1. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. Il existe un isomorphisme entre V et $\mathbb{K}^n$.

Preuve. Soit $(b_i)_{i=1}^n$ une base de V, et $(b_i)_{i=1}^n$ la base canonique de K^n. Alors

$$\phi\colon \begin{array}{c} V \to \mathbb{K}^n \\ v = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i b_i \mapsto (\alpha_i)_{i=1}^n \end{array}$$

décrit un isomorphisme d'espaces-vectoriels. En particulier, $\forall i \in \mathbb{N}_n$, $\phi(b_i) = e_i$ et on peut vérifier que c'est un morphisme d'espaces vectoriels:

$$\phi(\Sigma_{i=1}^n \alpha_i b_i + \lambda \Sigma_{i=1}^n \beta_i b_i) = \phi(\Sigma_{i=1}^n (\alpha_i + \lambda \beta_i) b_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\alpha_i + \lambda\beta_i)_{i=1}^n \\
&= (\alpha_i)_{i=1}^n + \lambda(\beta_i)_{i=1}^n \\
&= \phi(\Sigma_{i=1}^n \alpha_i b_i) + \lambda\phi(\Sigma_{i=1}^n \beta_i b_i)
\end{aligned}
$$

Ensuite en explicitant la fonction réciproque:

$$\phi^{-1} \colon e = (\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n \mapsto \Sigma_{i=1}^n \alpha_i b_i \in V$$

on prouve que ϕ est de plus une bijection. $\square$

Il serait assez étonnant que le lecteur soit arrivé jusqu'ici sans n'avoir jamais eu connaissance des définitions de base (valeur propre, espace propre...), mais on va toute de même s'appliquer à les rappeler. On énonce aussi le théorème suivant dont la preuve ne sera pas donnée ici:

Théorème. Tout polynome de $\mathcal{M}[\mathbb{C}]$ est scindé.

Définition 1.3.1 (multiplicité)**.** Soit $P \in \mathcal{M}[\mathbb{K}]$. La *multiplicité* d'une racine a de P est le plus grand entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $(X - a)^k \mid P$.

Définition-Proposition 1.3.1 (Rappel)**.** $\lambda \in \mathbb{C}$ est une *valeur propre* de $A \in \mathcal{M}[\mathbb{C}]$ si $\exists u \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ tel que

$$
\begin{aligned}
&Au = \lambda u \\
\Leftrightarrow\ &Au - \lambda u = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(A - \lambda \operatorname{Id}_n)u = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\det(A - \lambda \operatorname{Id}_n) = 0
\end{aligned}
$$

Donc l'ensemble des valeurs propres de A est l'ensemble des racines du *polynome caractéristique* de A: $p_A(t) = \det(A - t \operatorname{Id}_n)$. Or c'est un polynôme à coéfficients dans $\mathbb{C}$ donc il est scindé et A possède n valeurs propres comptées avec leur multiplicitées.

Soit λ une valeur propre de $A \in \mathcal{M}[\mathbb{C}]$. On appelle *espace propre* de λ, noté E_λ, l'ensemble des vecteurs u de $\mathbb{C}^n$ qui sont envoyés sur λu par l'application $F_A \colon u \to Au$.

Proposition 1.3.1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A \in \mathcal{M}[\mathbb{C}]$. Alors $\dim E_\lambda \geqslant 1$.

Preuve. Par définition d'une valeur propre, $\exists u \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$. En particuler, en reprenant les notations de la proposition précédente, $\forall \mu \in \mathbb{C}$, F_A envoie μu sur $\lambda \mu u$, i.e. $\mathbb{C}u \subseteq E_\lambda \Rightarrow \dim(E_\lambda) \geqslant 1$. □

On va pouvoir aussi se servir de ce qui a déjà prouvé pour montrer que toute matrice de $\mathcal{M}[\mathbb{C}]$ est congruente à la matrice diagonale $\operatorname{diag}((\lambda_i)_{i=1}^n)$ où $(\lambda_i)_{i=1}^n$ sont les valeurs propres de A (pas forcément distinctes).

Définition 1.3.2. Soit λ une valeur propre de $A \in \mathcal{M}[\mathbb{C}]$.

La *multiplicité algebrique* de λ (notée $\mathrm{m}_{alg.}(\lambda)$) est sa multiplicité en tant que racine de p_A.

La *multiplicité géometrique* de λ (notée $\mathrm{m}_{geom.}(\lambda)$) est la dimension de l'espace E_λ.

Proposition 1.3.2 (Égalité des multiplicités)**.** Soit $A \in \mathcal{M}[\mathbb{C}]$ symétrique. Soit λ une valeur propre de A. Alors

$$\mathrm{m}_{geom.}(\lambda) = \mathrm{m}_{alg.}(\lambda)$$

Preuve. On a vu dans la section (1.2) que A est équivalente à une matrice diagonale D: $\exists P \in \mathcal{M}[\mathbb{C}]$ inversible tel que

$$A = P^{-1} \operatorname{diag}((a_i)_{i=1}^n) P$$

Or, $\forall X \in \mathcal{M}[\mathbb{C}], \forall U \in \mathcal{M}[\mathbb{C}]$ inversible,

$$\begin{aligned}
\det(t \operatorname{Id}_n - P^{-1}AP) &= \det(P)\det(tP^{-1} - P^{-1}A) \\
&= \det(P)\det(t \operatorname{Id}_n - A)\det(P^{-1}) \\
&= \det(t \operatorname{Id}_n - A)
\end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de deux matrices équivalentes sont égales. Or,

$$p_D(t) = \Pi_{i=1}^n (t - a_i)$$

Donc en renumérotant les valeurs propres de A, on obtient que $\forall i \in \mathbb{N}_n$, $a_i = \lambda_i$.

Plus précisément, comme A est diagonalisable (section 1.2), il existe une famille orthogonale de vecteurs $(u_i)_{i=1}^n$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ \hline \vdots \\ \hline u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c} u_1 & \dots & u_n \end{array} \right)$$

Donc

$$A = \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^\top$$

Et

$$Au_i = \lambda_i u_i \langle u_i, u_i \rangle = \lambda_i u_i$$

Donc pour une valeur propre λ de A soit $I = \{k \in \mathbb{N}_n \mid \lambda_k = \lambda\}$. Uniquement les vecteurs $(u_i)_{i \in I}$ sont envoyés sur λu_i par l'application F_A. Donc ils forment une base de E_λ. $\square$

Dans la pratique, sachant que pour une matrice symétrique les multiplicités algébriques et géometriques sont identiques, on va plutôt utiliser calculer les matrices associées de la manière suivante:

Proposition 1.3.3 (Processus d'orthogonalisation de Graam-Schmidt)**.** Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On peut construire une base orthogonale à partir de n'importe quelle base de V.

Preuve. Soit $(b_i)_{i=1}^r$ une base de V. On va proposer une méthode pour construire une base orthogonale $(c_i)_{i=1}^r$ de V à partir de $(b_i)_{i=1}^r$.

L'intuition vient du fait que

$$\begin{aligned}
\langle b_1, b_2 - \alpha_{b_2,b_1} b_1 \rangle &= \langle b_1, b_2 \rangle - \alpha_{b_2,b_1} \langle b_1, b_1 \rangle \\
&= \langle b_1, b_2 \rangle - \frac{\langle b_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} \langle b_1, b_1 \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On définit alors $(c_i)_{i=1}^r$ par récurrence:

- Pour un espace vectoriel de dimension 1, la base est toujours orthogonale donc on pose $c_1 = b_1$.

- Ici on admet pouvoir construire une base orthogonale d'un espace de dimension $k \geqslant 1$ et on veut en construire une pour tout espace de dimension $k+1$. En admettant que l'espace de dimension $k+1$ ait une base $(b_i)_{i=1}^{k+1}$, on peut déjà considérer le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}((b_i)_{i=1}^k)$ et obtenir une base orthogonale $(c_i)_{i=1}^k$ de cet espace. Comme on est dans le cas défini positif, les coefficient de Fourrier sont toujours définis et on peut poser:

$$c_{k+1} = b_{k+1} - \Sigma_{i=1}^{k} \alpha_{b_{k+1},c_i} c_i$$

Et on a $\forall l \in \mathbb{N}_k$

$$\langle c_{k+1}, c_l \rangle = \langle b_{k+1}, c_l \rangle - \Sigma_{i=1}^{k} \alpha_{b_{k+1}, c_i} \langle c_i, c_l \rangle$$

Or par hypothèse de recurrence $\forall i \in N_k \setminus \{l\}, \langle c_l, c_i \rangle = 0$ Donc

$$\langle c_{k+1}, c_l \rangle = \langle b_{k+1}, c_l \rangle - \alpha_{b_{k+1}, c_l} \langle c_{k+1}, c_l \rangle = 0$$

On a donc montré que $(c_i)_{i=1}^{k+1}$ est une base orthogonale de V.

Donc on peut obtenir une base orthogonale pour un espace vectoriel V de dimension arbitraire. □

Ce dernier résulat permet de montrer en particulier que les espaces propres d'une matrice symétrique sont orthogonalisables. Le résultat qui suit prouve qu'ils sont en fait aussi orthogonaux entre eux:

Proposition 1.3.4 (Orthogonalité des espaces propres)**.** Soit $A \in \mathcal{M}[\mathbb{K}]$ symétrique, et λ, μ deux valeurs propres *distinctes* de A. Alors $E_\lambda \perp E_\mu$.

Preuve. Déjà une valeur propre doit forcément avoir un vecteur propre associé non nul par définition donc $\dim E_\lambda$, $\dim E_\mu \geqslant 1$.

Soit (u, v) une paire de vecteurs propres de A associée a la paire de valeurs propres (λ, μ) i.e. $Au = \lambda u$ et $Av = \mu v$. On a:

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle &= \langle \frac{1}{\lambda} Au, \frac{1}{\mu} Av \rangle \\
\Leftrightarrow \langle u, v \rangle &= \frac{1}{\lambda\mu} \langle Au, Av \rangle \\
\Leftrightarrow \langle u, v \rangle &= \frac{1}{\lambda\mu} (Au)^\top (Av) \\
\Leftrightarrow \langle u, v \rangle &= \frac{1}{\lambda\mu} u^\top A^\top Av \\
\Leftrightarrow \langle u, v \rangle &= \frac{1}{\lambda\mu} u^\top A^2 v \text{ par symétrie de } A \\
\Leftrightarrow \langle u, v \rangle &= \frac{\mu}{\lambda} u^\top v \text{ avec } A^2 v = \mu^2 v \\
\Leftrightarrow \langle u, v \rangle &= \frac{\mu}{\lambda} \langle u, v \rangle
\end{aligned}$$

Et comme $\mu \neq \lambda$, on a forcément $\langle u, v\rangle = 0$.

Donc

$$\forall u \in E_\lambda,\ \forall v \in E_\mu,\ \langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow E_\lambda \perp E_\mu.$$

$\square$

Ainsi, soit $A \in \mathcal{M}[\mathbb{C}]$ symétrique. On dénote ses valeurs propres *distinctes* par $(\lambda_i)_{i=1}^r$, et la base orthogonale de l'espace propre E_{λ_i} par $(b_{ij})_{j=1}^{k_i}$ avec $k_i := \dim(E_{\lambda_i})$. On a donc par la proposition précédente que $((b_{ij})_{j=1}^{k_i})_{i=1}^r$ est une famille de vecteurs orthogonaux. Elle est de plus libres par la proposition suivante:

Proposition 1.3.5. Toute famille orthogonale de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre.

Preuve. Soit $(b_i)_{i=1}^r$ une telle famille. Alors si elle n'est pas libre, en particuler $\exists (\alpha_i)_{i=1}^r \in \mathbb{K}^r \setminus \{\vec{0}\}$ tel que:

$$\Sigma_{i=1}^r \alpha_i b_i = 0$$

i.e. $\exists k \in \mathbb{N}_r$ tel que $\alpha_k \neq 0$ donc

$$b_k = \frac{1}{\alpha_k} \Sigma_{i=1, i\neq k}^r \alpha_i b_i$$

Et comme $\langle , \rangle$ est définie positive,

$$\langle b_k, b_k\rangle \neq 0$$

Or par orthogonalité

$$\begin{aligned}\langle b_k, b_k\rangle &= \langle b_k, \frac{1}{\alpha_k} \Sigma_{i=1, i\neq k}^r \alpha_i b_i\rangle \\ &= \Sigma_{i=1, i\neq k}^r \alpha_i \langle b_k, b_i\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Ce qui est absurde. Donc la famille est libre. $\square$

En considérant que les multiplicités algebriques et géometriques sont égales, soit $(b_i)_{i=1}^n = ((b_{ij})_{i=1}^r)_{j=1}^{k_i}$ et on se ramène à:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 \\ \hline \vdots \\ \hline b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c} b_1 & \ldots & b_n \end{array} \right)$$

Ainsi, quand $A \in \mathcal{M}[\mathbb{C}]$ est symétrique, une méthode efficace pour calculer les matrices associées à la diagonalisation est:

- On calcule $p_A(t) = \det(t \operatorname{Id}_n - A)$
- On cherche les racines $(\lambda_i)_{i=1}^r$ de p_A (comptées avec leur multiplicité)
- On calcule les bases des espaces propres E_{λ_i}
- On trouves les bases orthogonales $((b_{ij})_{i=1}^r)_{j=1}^{\dim(E_{\lambda_i})}$ de ces espaces via le procéssus d'orthogonalisation de Graam-Schmidt.
- On les rassemble en une famille orthogonale $(b_i)_{i=1}^n$ et on pose $P = \left(\begin{array}{c|c|c} b_1 & \ldots & b_n \end{array} \right)$
- On vérifie que $A = P^\top \operatorname{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n) P$